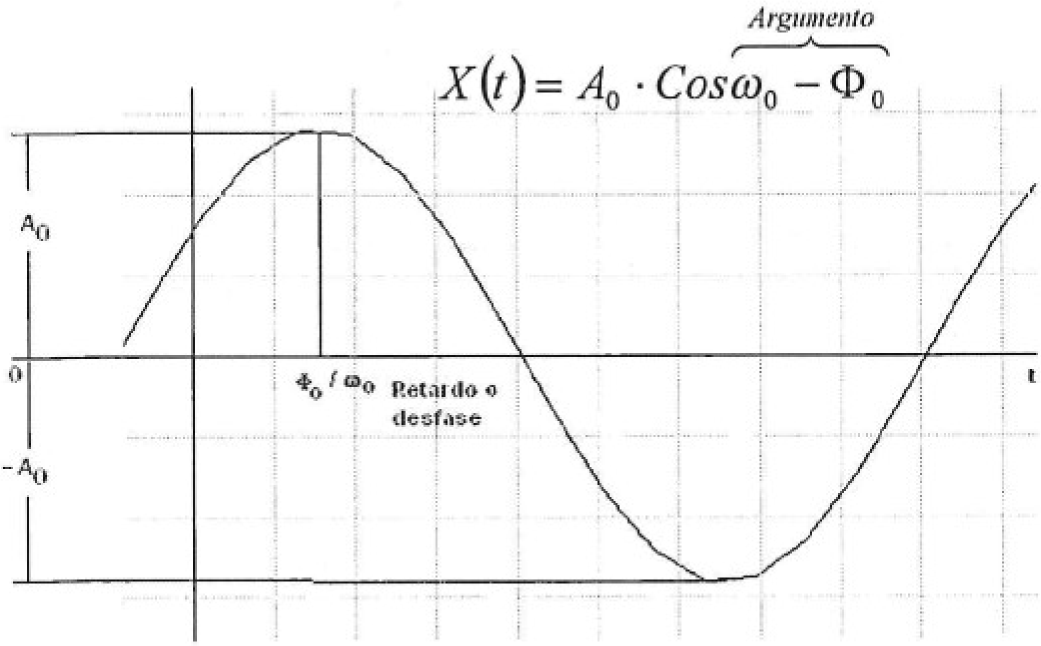
Apuntes de radiotecnia



Agustín J. Carmona Lorente

Tema 1. Introducción a los sistemas de Radiocomunicaciones

1.1 Definiciones

1.1.a) Onda electromagnética: *"Es la forma de propagación de la radiación electromagnética a través del espacio[1]".*

En general cualquier perturbación electromagnética se propaga y se desplaza en un tiempo determinada y de forma esférica, creando lo que llamaremos frentes de ondas.

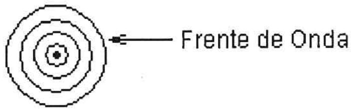


Fig. 1.1 Ondas electromagnéticas

1.1.b) Frente de Ondas: Dada una onda propagándose los frente de onda serán líneas, que se alejan de la fuente a una velocidad determinada a lo largo del tiempo y sin tocarse.

Dado un punto A donde radiamos una señal que se propaga a una velocidad $C_0 = 3 \cdot 10^8\ m/s$ Y un valor medio dado, en el punto B la recepción llegara con un retraso igual a la longitud de onda λ.

Por tanto $\lambda = C_0 \cdot T_0$, donde C_0 es la velocidad y T_0 el tiempo que tarda en llegar. También se puede calcular la longitud de onda en función de la frecuencia:

$\lambda = \dfrac{C_0}{f}$	(1.1)

Supongamos una señal de 1KHz, le corresponderá una longitud de onda λ de 300 Km., o lo que es lo mismo sus frentes de onda estan separados 300 Km.

$$\lambda = \frac{C_0}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{1000} = 300\ Km$$

En cada longitud de onda λ el valor instantáneo de la señal se encuentra en el mismo punto.

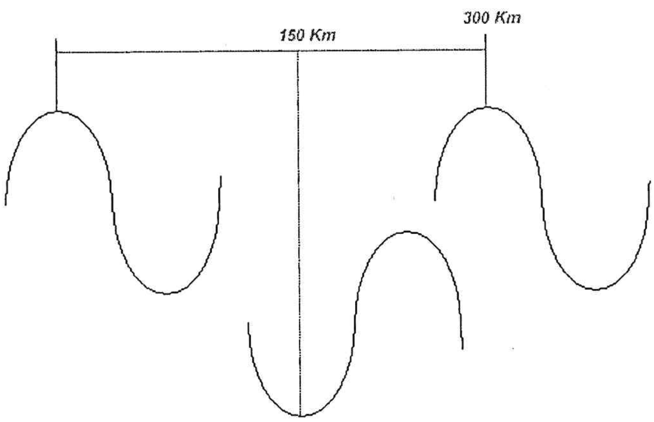


Fig. 1.2 Longitud de onda

[1] Wikipedia

Si la recepción se toma a mitad de camino, la señal estará desfasada 180º, por tanto el desfase ϕ es proporcional a la distancia que se tome la recepción.

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \rightarrow \lambda \\ \phi \rightarrow d \end{array}\right\} \text{ Donde } \phi = \frac{2\pi \cdot d}{\lambda}$$

Si $\phi = 2\pi$

$$Cos\omega_0 t - \phi = \left[\omega_0\left(t - \frac{\phi}{\omega_0}\right)\right]$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$$

Entre dos puntos móviles A y B, aparece lo que se conoce como efecto Doppler, produciéndose una disfonía en la recepción.

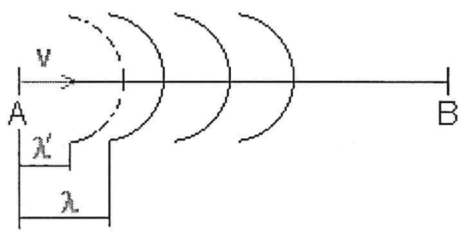


Fig. 1.3 Efecto Doppler

Si A se mueve hacia B a una velocidad constante v, en un instante se transmite el primer frente de onda, pero cuando se va a transmitir el segundo, la distancia d entre A y B será distinta. Por lo tanto en el receptor se obtendrá una longitud de onda diferente cuyo valor será: $\lambda = \lambda' - v \cdot T_0$ Y la frecuencia variará perdiéndose la recepción.

1.1.c) <u>Unidades de medida</u>

Se usara el decibelio dB, para expresar la relación entre dos potencias eléctricas. Es una unidad logarítmica, adimensional y relativa que nos facilitara la representación grafica de parámetros de valores muy distanciados.

$$x(dB) = 10\log\frac{P_s}{P_e} \qquad\qquad P_{(dB)w} = 10 \cdot \log_{10} P_{(w)}$$

Para operar con potencias expresadas en decibelios se tiene que tener en cuenta las unidades de potencia a las que están referidas. $P_{(dB)w} \rightarrow P_{(w)}$, $P_{(dB)mw} \rightarrow P_{(mw)}$, etc.

Dada una potencia de 1w o de 1 mw

$$1w \rightarrow 0\ dBw \qquad\qquad 1mW \rightarrow 0\ dBm$$

$$\rightarrow 30dBm \qquad\qquad \rightarrow -30\ dBw$$

Dado un dispositivo cuya potencia de entrada llamaremos **P₁** y la potencia de salida **P₂**.

- Si $P_2 > P_1$ El dispositivo es amplificador cumpliéndose $S = \frac{P_1}{P_2}$
- Si $P_2 < P_1$ El dispositivo es atenuador cumpliéndose $L = \frac{P_2}{P_1}$
- La ganancia $g = \frac{1}{L}$

Expresando la ganancia en decibelios $G = 10 \cdot \log g \quad (dB)$.

$$G = 10 \cdot \log g = 10 \cdot \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \cdot \log P_2 - 10 \cdot \log P_1$$

1.2.b) Ejemplo:

Dado un dispositivo, P_1= -20 dBm, P_2= 2 w.

$$P_1 = -20\ dBm \Rightarrow 10^{-20/10} = 0'01\ mw$$
$$P_2 = 2\ w \Rightarrow 2000\ mw \Rightarrow 10 \cdot \log 2000 = 10 \cdot \log 2 + 10 \cdot \log 1000 = 33\ dBm$$

$$P = 10 \cdot \log \frac{P_2}{P_1} = 10 \cdot \log \frac{2}{0.00001} = 10 \cdot \log 200000 =$$
$$= 10 \cdot \log 2 + 10 \cdot \log 10^5 = 3 + 50 = 53\ dBm$$

$$G = P_2 - P_1 = 33 - (-20) = 53\ dBm$$

Tabla de ejemplo de conversiones en las diferentes unidades

	dBp	dBn	dB μ	dBm	dBw
10 mw	100	70	40	**10**	-20
3 w	124'7	94'7	64'7	34'7	**4'7**
4 pw	**6**	-24	-54	-84	-114

1.1.d) Absorción

Cuando la propagación de una onda electromagnética, se produce a través de otro medio distinto al vacío. Esta onda entra en contacto con moléculas que tienen una determinada frecuencia de resonancia, si esta frecuencia coincide con la frecuencia de la onda electromagnética se producen perdidas de energía.

wsxdwxqzq1.1.e) Reflexión:

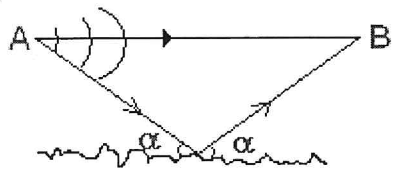
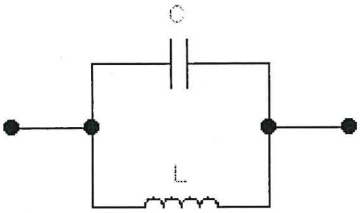


Fig. 1.4 Reflexión

En el camino de propagación entre los puntos A y B La onda electromagnética puede chocar con algún obstáculo, produciéndose un rebote de la señal con el mismo ángulo con el que incidió sobre el obstáculo. Al llegar la onda desde A hasta B por dos caminos diferentes, la longitud de onda será diferente y por lo tanto se producirán interferencias llegando incluso a la atenuación total de la señal.



La admitancia Y del circuito será:

$$Y = -j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = j\omega C\left[1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right]$$

$$\omega_{r_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

1.1.f) Refracción

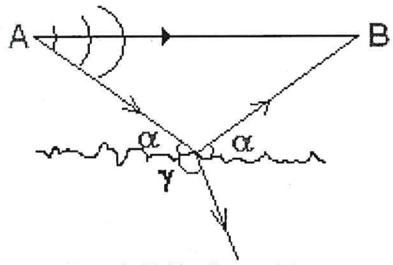


Fig. 1.5 Refracción

Este fenómeno es simultáneo al de reflexión. Consiste en que parte de la energía que choca contra un obstáculo, lo atraviesa y sigue la propagación con un ángulo diferente con la consiguiente perdida de energía de la señal principal.

1.1.g) Dispersión

Fig. 1.5 Dispersión

Se trata de una refracción múltiple. Se produce cuando la longitud de onda de la señal es igual en orden de magnitud a la del terreno donde se refleja, o bien, esta onda choca contra gotas de agua o cualquier otro hidrometeoro.

1.1.h) Difracción

Fig. 1.6 Difracción

Cuando una señal en el camino de su propagación llega al borde de un obstáculo del terreno, este borde se convierte en un foco secundario de propagación, a costa de perdidas de potencia.

Cada frente de onda de una emisión se comporta como un nuevo frente de emisión, cuya potencia de emisión será $4 \cdot \pi \cdot d^2$ se produce a menor frecuencia.

1.1.i) Transmisión

Dada una señal $x(t)$ genérica, periódica o no, se pueden observar sus componentes espectrales $X(f)$, pudiéndose determinar la máxima frecuencia determinando ancho de banda máximo.

Por otro lado para transmitir una señal a través de una antena, "transductor de energía eléctrica a onda electromagnética", su eficiencia está relacionada con la longitud de onda de la frecuencia de la onda a transmitir. El tamaño de la antena es igual a la longitud de onda.

1.1.j) Modulación

Dada una señal de 4 KHz , su longitud de onda $\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{4000} = 75\ Km$, por tanto la longitud de antena será 75 km.

Por tanto a la señal a transmitir se tratara de forma que se pueda radiar con una gran eficiencia con una antena.

Modulación es pues la translación de la frecuencia a radiar con sus componentes , a otra que permita utilizar antenas estándar.
La calidad de una antena se calcula:

$$Q = \frac{f_0}{B}$$

También mediante la modulación podemos conseguir agrupar un numero determinado de señales para trasmitirlas y permitiéndonos posteriormente discriminarlas y reproducirlas.

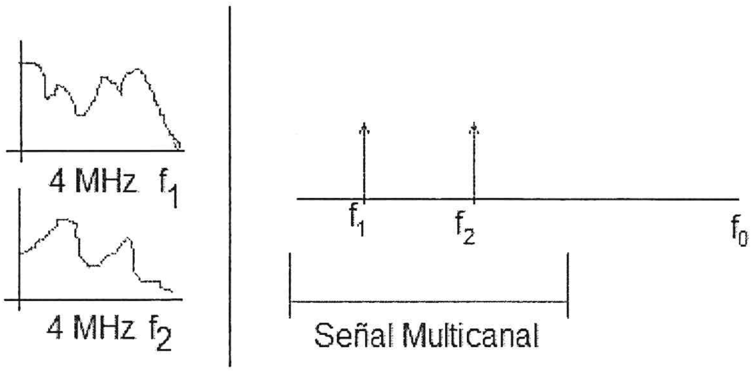


Fig 1.7 Modulación multicanal

1.1.k) Portadora

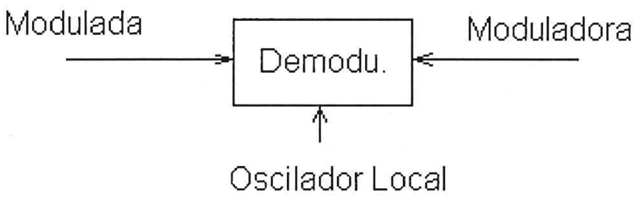
Señal senoidal del tipo $P(t)=A_{0.}\cdot Cos(\omega_0 t\ \phi_0)$originada de modo local que se usa en la modulación.

a) Señal Moduladora: *Señal con la información a trasmitir.*

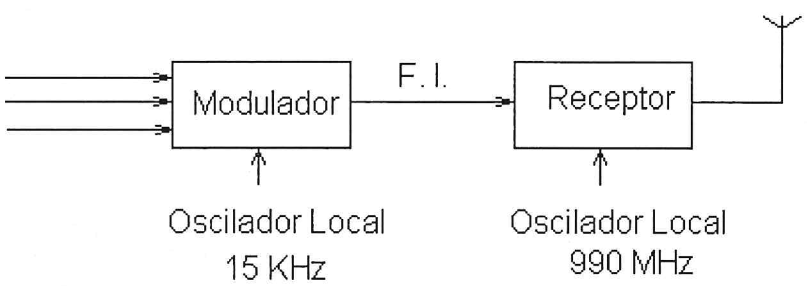
b) Señal Portadora: *Señal local que servirá de guía o soporte.*

c) Señal Modulada: *Señal trasladada en frecuencia, resultado de montar A sobre B.*

El trasmisor se encarga de preparar la señal antes de excitar antena, mientras que en el receptor se realizan las labores contrarias.
El receptor adapta la señal recibida en la antena para pasarla al demodulador.



En algunos casos será necesario utilizar una frecuencia intermedia y posteriormente elevarla a la frecuencia de transmisión.



1.1.l) Ruido

Se trata de una señal no deseada cuya naturaleza es aleatoria y sus efectos se estudian en el receptor.

Causas externas

- Meteorológicas
- Atmosféricas
- Perturbaciones industriales

Causas internas

- Agitación electrónica debida a la temperatura

1.1.m) Interferencias

Señales generadas por el hombre y que comparten el medio y el servicio.

1.1.n) Clasificación de los sistemas

- Sistemas limitados por ruido
  - Radio enlaces
- Sistemas limitados por interferencias
  - Comunicaciones móviles

Tema 2. Representación de señales eléctricas

2.1 Representación de señales en el dominio del tiempo
2.2 Representación de señales en el dominio de la frecuencia

Introducción.

Es importante, a la hora del análisis de una señal, no perder la perspectiva de cómo, cuales y que son las señales que atraviesan un equipo electrónico.
Según el diccionario de la Real Academia de la Lengua una señal es:

- *"Vestigio o impresión que queda de algo, por donde se viene en conocimiento de ello."*
- *"Variación de una corriente eléctrica u otra magnitud que se utiliza para transmitir información."*

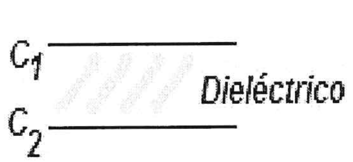
En estas definiciones se mezcla la magnitud física con la función matemática que la representa:

$$v(t) = \underbrace{A \cdot \cos(\omega_0 t)}_{\text{Función Matemática}}$$

En radiotecnia se usaran fundamentalmente las funciones llamadas deterministas, las que se pueden calcular su valor en un instante determinado. Usándose estas como funciones piloto.
Para funciones complejas como las que representan la voz humana, se usaran métodos estadísticos como el de probabilidad para determinar sus valores.

Una señal eléctricas una expresión que representa las diferencias de potencial en partes o en todo un circuito. En señales complejas será necesario conocer parámetros de esta como V_{pp}, velocidad, etc para que al hacerla pasar por un dispositivo determinado, este no le provoque deformaciones, distorsiones, apreciables. O lo que es lo mismo que el nivel de fiabilidad de la señal resultante de su tratamiento sea alto.

Por ejemplo una señal a través de dos conductores aislados por un dieléctrico:



- Si la V_{max} de la señal es muy elevada se rompería el dieléctrico.
- Si l a velocidad de cambio de una señal es demasiado elevada podría hacer que un condensador no siguiese esos cambios.

El desarrollo de una señal compleja da lugar a un conjunto de señales fundamentales. Para lo que se utilizan desarrollos matemáticos que igualan la señal compleja a una sucesión de operaciones con señales mas simples y fáciles de manejar.

Por ejemplo dada una señal compleja V(t):

$V(t) = \sum_{K=1}^{w} B_k \cdot \Psi(t)$	(2.1)

Los desarrollos matemáticos más usuales serán:

- Desarrollo de Taylor
- Desarrollo de Fourier

Desarrollo de Fourier

Nos permite relacionar una señal en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia.

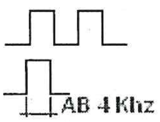


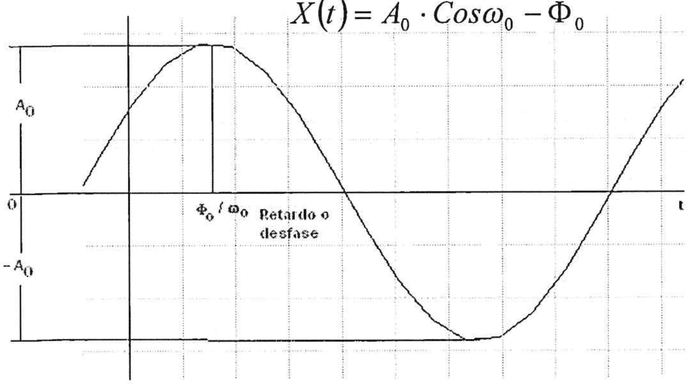
Fig.2

Dada la señal de la figura 2, a través del desarrollo de Fourier veremos el numero de frecuencias que la compones y la amplitud de cada una de ellas, dándonos la posibilidad, por ejemplo, de determinar la cantidad de frecuencias (ancho de banda) necesarias para reproducir la señal una vez que pasen por un dispositivo. Por ejemplo el ancho de banda necesario en una comunicación telefónica es de 4 KHz.
Se ensaya con señales periódicas fundamentales del tipo:

$X(t) = A_o \cdot Cos(\omega_0 t - \Phi_o)$ Donde : A_0 *Es la amplitud* $\omega_0 t$ *Es la velocidad angular* Φ_0 *Es el desfase inicial*	(2.2)

Genéricamente:

$$X(t) = A_0 \cdot Cos\overbrace{\omega_0 - \Phi_0}^{Argumento}$$



Velocidad angular

En función a la frecuencia:

$$W_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0$$

En función al periodo:

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T_0}$$

Partiendo de señales periódicas infinitas $(-\infty,+\infty)$, como la anterior, Fourier propone una representación complementaria donde en el eje x se representa ahora la frecuencia y en el eje Y la amplitud o la fase.

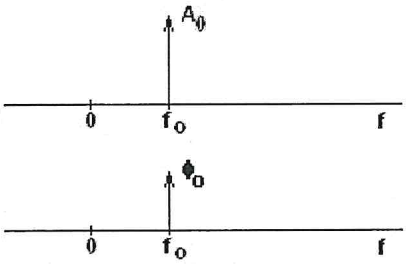


Fig. 3 Representación de Amplitud y de Fase

Por tanto a una frecuencia $\mathbf{f_0}$ le corresponde una Amplitud A_0 y una fase Φ_0. Con esta señal tipo definida, nos permite descomponer otras señales periódicas infinitas.

Una señal periódica queda definida por la expresión $X(t-T_0)=X(t)$ y por tanto se debe de cumplir que $X(t)=\cos(\omega_0 \cdot t)=X(t-T_0)=\cos(\omega_0 \cdot (t-T_0))$.

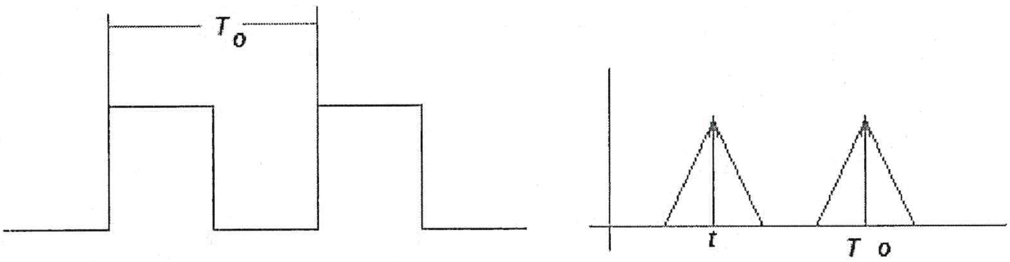


Fig. 4 Representación de señales separadas T_0

Para considerar una señal periódica debe cumplirse al desplazarse $\mathbf{nT_o}$ periodos resulta la misma señal.

Tomando una señal periódica del tipo $X(t)=A_o \cdot Cos(\omega_0 t-\Phi_o)$, representada mediante un diagrama de Euler, mediremos la proyección de A_0 sobre el eje x

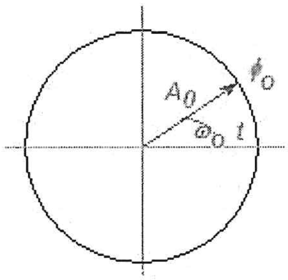


Fig. 5 diagrama de Euler

Euler usa la expresión del vector según el número complejo $K \cdot e^{j\Phi}$, o su expresión binómoica $\cos\Phi + j\ seno\Phi$ para A_0=1.

$$e^{j\omega_0} = Cos\,\omega + jSen\omega$$

$$\Re e\left\{A_0 \cdot e^{j(\omega_0 t - \phi_0)}\right\} \Re e\underbrace{\left\{A_0 \cdot e^{-j\phi_0} \cdot e^{j\omega_0 t}\right\}}_{FASOR}$$

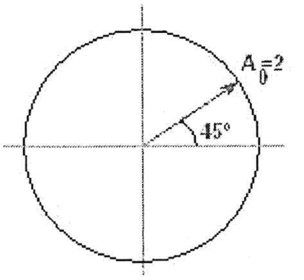


Fig. 6 **Ejemplo de Fasor**

$$A_0.e^{j\phi_0} = 2 \cdot e^{j45} =$$

$$= 2Cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j2Sen\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} + j\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Fourier, usa por tanto la señal fundamental del tipo $e^{j\omega_0 t}$, para descomponer señales más complejas.

Estas señales fundamentales cumplen que cada uno de sus vectores deben de ser ortogonales, ósea, el producto escalar entre ellos debe de ser igual a 0.

Dados los vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$ se cumplirá que:

$$\left|\bar{A}\right| \cdot \left|\bar{B}\right| \cdot Cos\alpha = 0$$

Siendo α el ángulo comprendido, para que se cumpla esta igualdad $\alpha = 90^o$.

Dos funciones son ortogonales cuando de cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_k(t) = e^{jkw_0 t} \\ \Psi_m(t) = e^{jm\omega_0 t} \end{array}\right\} \int_{T_0} \Psi_k \cdot \Psi_m(t)^* \cdot dt = 0$$

$$\int_{T_0} e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{T_0/2}^{-T_0/2} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = 0\ Para\ k \neq m$$

En resumen, dada una función periódica X(t), siempre se podrá descomponer en un sumatorio infinito de señales fundamentales.

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_0 t} =$$

$$X(t) = \cdots + C_{-2} \cdot e^{-j2\omega_0 t} + C_{-1} \cdot e^{-j\omega_0 t} + C_0 + C_1 \cdot e^{j\omega_0 t} + C_2 \cdot e^{j2\omega_0 t} \cdots + C_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

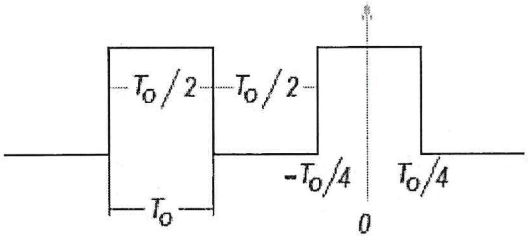
El resultado debe de ser simétrico. Ya que al sumarse en parejas, $C_1 + C_{-1} + \cdots + C_n + C_{-n}$ el resultado será solo la parte real (suma de uno más su conjugado).

Según Fourier:

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int X(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Ejemplo 2.1:

Supongamos la señal periódica cuadrada $X(t) = \sum_{n}^{\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_0}$ con una amplitud A, de la figura.



$$C_n = \frac{1}{T_0} \int X(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt =$$

$$= \frac{A}{T_0} \int_{-T_0/4}^{T_0/4} e^{-jn\omega_0 t} dt =$$

$$\frac{A}{T_0} \cdot \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \Bigg|_{-T_0/4}^{T_0/4}$$

$$C_n = \frac{A}{-jn\omega_0 T_0} \left[e^{-jn\omega_0 \frac{T_0}{4}} - e^{jn\omega_0 \frac{T_0}{4}} \right]$$

Como $\omega_0 \cdot T_0 = 2\pi$

$$C_n = \frac{A}{-jn \cdot 2 \cdot \pi} \left[\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - j\,Sen\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - j\,sen\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$C_n = \frac{A}{+\cancel{j}n \cdot \cancel{2} \cdot \pi} \left[+\cancel{2}\,\cancel{j}\,Sen\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{A \cdot Sen\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n \cdot \pi}$$

$$C_{n} = \frac{A \cdot Sen\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n \cdot \pi}$$

Calcularemos los valores para C0, C1, C2, C3, C4, C4,.... Cn

$C_0 = \dfrac{A \cdot sen\left(0 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{0 \cdot \pi} = \dfrac{0}{0}$ Para eliminar esta indeterminación se usará la regla de L´Hopital. $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$$C_0 = \left.\frac{A\frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\pi}\right|_{n=0} = \frac{\frac{A \cdot \pi}{2}}{\pi}$$

$$C_1 = \frac{A \cdot sen\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{1 \cdot \pi} = \frac{A}{\pi}; \quad C_2 = \frac{A \cdot sen\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{2 \cdot \pi} = 0; \quad C_3 = \frac{A \cdot sen\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{3 \cdot \pi} = \frac{A}{3\pi};$$

$$C_4 = \frac{A \cdot sen\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{4 \cdot \pi} = 0; \quad C_5 = \frac{A \cdot sen\left(5 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{5 \cdot \pi} = \frac{A}{5\pi}; \quad \cdots$$

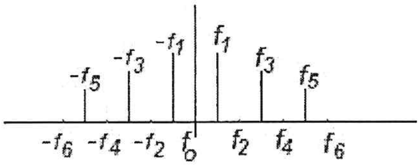
$$C_n = (-1)^{\frac{n+3}{2}} \; para\; n = 1,3,5,\ldots$$
$$C_n = 0 \; Para\; n = 2,4,6,\ldots$$

Cada valor de $\mathbf{C_n}$ nos dará tanto la amplitud y la fase para cada frecuencia. Con estos datos, dan lugar a la representación de Fourier (es importante saber que esta representación tiene solo un sentido matemático, ya que no puede haber una frecuencia negativa). En esta representación se pintan el espectro de amplitudes solo del lado positivo, ya que sabemos que $C_n = C_n^*$

$|C_{-n}| = |C_n|; \; \langle C_n = -\langle C_n$

Ejemplo:

$$1 + j \Rightarrow \sqrt{2}\,\langle 45^\circ$$
$$1 - j \Rightarrow \sqrt{2}\,\langle -45^\circ$$



Para una función $X(t)=\sum_{n}^{\infty} C_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$, como tiene que cumplirse $C_{-n}=C_n^*$, se escribe que:

$$X(t)=C_o+C_{-1}\cdot e^{-j\omega_0 t}+C_1\cdot e^{j\omega_0 t}+C_{-2}\cdot e^{-j\omega_0 t}+C_2\cdot e^{j\omega_0 t}+\cdots$$

$$\boxed{\begin{aligned} C_n &= A_n \cdot e^{j\phi_n} \\ A_n &= |C_n| \\ \phi_n &= \langle C_n \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} C_1 &= A_1 \cdot e^{j\phi_1} \\ C_1 &= A_1 \cdot e^{-j\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$X(t)=C_0+A_1\cdot e^{-j\phi_1}\cdot e^{-j\omega t}+A_1\cdot e^{j\phi_1}\cdot e^{j\omega t}+A_2\cdot e^{-j\phi_2}\cdot e^{-j\omega t}+A_2\cdot e^{j\phi_2}\cdot e^{j\omega t}+\cdots$$

$$=C_0+A_1\cdot e^{-j(\omega_0 t+\phi_1)}+A_1\cdot e^{j(\omega_0 t+\phi_1)_1}+A_2\cdot e^{-j(\omega_0 t+\phi_2)}+A_2\cdot e^{j(\omega_0 t+\phi_2)}+\cdots$$

A_n, (A_1, A_2,...A_n), es un numero real, resultado de la suma de cada numero con su conjugado.

Usando la formula de Euler: $e^{j\lambda}$=Cos λ+j Sen λ

$$X(t)=C_0+A_1\cdot Cos(\omega_0 t+\phi_1)+A_2\cdot Cos(2\omega_0 t+\phi_2)+\cdots$$

Por tanto

$X(t)=C_0+2\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot Cos(n\cdot\omega_0 t+\phi_n)$	(2.3)

Desarrollo de Fourier en función del coseno

$$\boxed{Cos(A+B)=Cos\ A\cdot Cos\ B-Sen\ A\cdot Sen\ b}$$

Aplicando esta razón trigonométrica a la expresión anterior (2.3)

$$X(t)=C_0+2\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot Cos\phi_n\cdot Cos(n\cdot\omega_0 t)+Sen\phi_n\cdot Sen(n\cdot\omega_0 t)$$

Determinando que:

$$2 \cdot A_n \cdot Cos\phi_n = a_n$$
$$2 \cdot A_n \cdot Sen\phi_n = b_n$$

$X(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot Cos(n \cdot \omega_0 t) + b_n \cdot Sen(n \cdot \omega_0 t)$	(2.4)

La potencia media de una señal periódica del tipo $X(t) = A \cdot Cos(\omega_0 t)$, será:

$$Pm = \frac{1}{T_0} \int x^2(t)\, dt = \frac{A_0^2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} Cos^2(\omega_0 t) dt\,,$$

como $\boxed{Cos^2\alpha = \frac{1 + Cos(2 \cdot \alpha)}{2}}$

$$Pm = \frac{A_0^2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[\frac{1}{2} + \frac{Cos(\omega_0 t)}{2} \right] dt.$$

Como la integral en un periodo de una señal es igual a 0 (2.5)

$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} Cos\,(K\omega_0 t)\, dt = \left. \frac{Sen\,(K\omega_0 t)}{(K\omega_0)} \right\|_{-T_0/2}^{T_0/2} = \frac{Sen\left(K\omega_0 \frac{T_0}{2} \right) + Sen\left(K\omega_0 \frac{T_0}{2} \right)}{K\omega_0} = \frac{2 \cdot Sen\,(K \cdot \pi)}{K\omega_0} = 0$	(2.5)

$\frac{A_0^2}{T_0} \cdot \frac{1}{2} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt = \frac{A_0^2}{2 \cdot T_0} \cdot T_0$. Por tanto la potencia media de una señal será:

$Pm = \frac{A^2}{2}$	(2.6)

Aplicando la propiedad de que las señales periódicas son ortogonales, la potencia media de una señal más compleja $x(t)=\sum_{k} C_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$ será:

$$Pm=\overline{x^2(t)}= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot x^*(x)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}\sum_{m} C_m \cdot e^{jm\omega_0 t}\cdot \sum_{n} C_n^* \cdot e^{jn\omega_0 t}dt =$$

$$=\frac{1}{T_0}\sum_{m}\cdot\sum_{n}\int_{T_0} C_m \cdot C_n^* \cdot \underbrace{e^{jn\omega_0 t}}_{=0(para\ m\neq n)} dt$$

$$\boxed{(a+jb)\cdot(a-jb)=a^2}$$

Además como m y n son iguales

$$Pm=\overline{x^2(t)}=\frac{1}{T_0}\sum_{m}|C_m|^2\cdot T_0$$

$Pm=\sum_{m=1}^{\infty}\lvert C_m\rvert^2$	(2.7)

Por tanto la potencia de una señal periódica compleja es resultado de la suma de la potencia de todos sus armónicos.

Usando la expresión del coseno (2.3):

$$X(t)=C_0^{\,2}+\sum_{n=1}^{\infty}2A_n\cdot Cos(n\cdot\omega_0 t+\phi_n)$$

$$X^2(t)=C_0^{\,2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2A_n)^2}{2}=C_0^{\,2}+\sum_{n=1}^{\infty}2A_n^{\,2}=$$

$X^2(t)=C_0^{\,2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\lvert C_n\rvert^2$	(2.8)

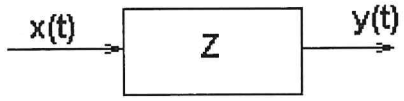
Del ejemplo 2.1

$$X(t)=\sum_{n}^{\infty}C_n\cdot e^{jn\omega_0}$$

$$P_m=\left(\frac{A_0}{2}\right)^2+2\left(\frac{A_0}{\pi}\right)^2+2\left(\frac{A_0}{3\pi}\right)^2+\ldots$$

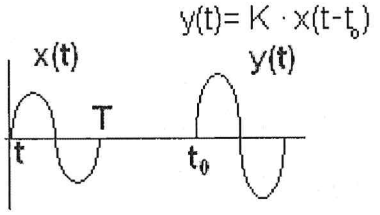
Tema 3. Procesos básicos para la señal

3.1 Distorsión



Dada una señal *x(t)* que atraviesa un canal ideal Z, da como resultado otra señal *y(t),* que será una fiel replica de la primera.

Para cumplir esta condición este canal debe de adaptarse realizando labores de amplificación o atenuación y provocando un retardo entre la señal de entrada y la señal de salida.



$$x(t) = 0 \; desde - \infty \; hasta \; t$$
$$x(t) = 0 \; desde \; T \; hasta + \infty$$

Fig. 3.1 Amplificación ideal

Si no se cumple esta condición se produce el fenómeno llamado de distorsión, o sea la reproducción no exacta de la señal a atravesar esta un canal determinado. $y(t) \neq K \cdot x(t - t_0)$.

Distinguiéndose dos causas fundamentales:

- Distorsión lineal, "propia de los canales lineales"
- Distorsión no lineal, "propia de los canales no lineales"

Los sistemas lineales se caracteriza por que si a la entrada aplicamos una combinación lineal de señales del tipo $x(t) = \lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$, a la salida obtendremos $y(t) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$, además de que los sistemas lineales deben de ser también invariantes en le tiempo.

Los sistemas no lineales son aquellos que no cumplen estas condiciones. A demás en la salida se obtienen componentes de frecuencia que no están a la entrada. La expresión matemática de este tipo de sistemas viene dada por $y(t) = f\left[\, x(t) \quad \right]$.

Para determinar la función matemática en la salida se usa el desarrollo de Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \left[\, f'(x_0) \cdot (x - x_0) \,\right] + \left[f''(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2} \right] + \left[f'''(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^3}{2 \cdot 3} \right] + \cdots$$

$$\cdots f^{(n}(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

El desarrollo de Taylor solo se usa en sistemas no lineales, ya que en sistemas lineales a partir de la segunda derivada es igual a cero.

Por ejemplo, el desarrollo de Taylor para $f(x)=e^x$:

$$f(x)=e^x \Rightarrow 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\cdots$$

3.1.a) <u>Estudio de la distorsión en los sistemas lineales</u>

Para realizar este estudio en sistemas lineales usaremos señales de varios tonos o frecuencias ya que si solo usamos señales del tipo $x(t)=A\cdot Cos\,\omega_0 t$ la salida será del tipo $y(t)=k_0\cdot A\cdot Cos\,\omega_0 t+\phi_0$ y por tanto no obtendremos información sobre la distorsión.

<u>Señal con dos tonos</u>

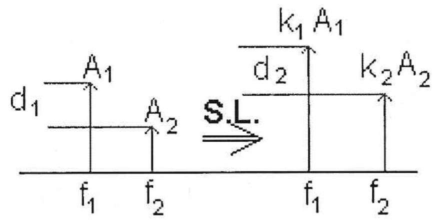


Fig. 3.1 Sistema lineal. Señal de dos tonos

Dada una señal del tipo $x(t)=A_1\cdot Cos\,(\omega_1 t)+A_2\cdot Cos\,(\omega_2 t)$ que atraviesa un canal determinado. Si este es lineal, (sistema lineal) dará como resultado a la salida $y(t)=k_1A_1\cdot Cos[\omega_1\,(t-t_1)]+k_2A_2\cdot Cos[\omega_2\,(t-t_2)]$. Para cada tono la constante proporcional ② es diferente, lo mismo que el retardo ⓿. Y en ambos depende de la frecuencia $k=k(\omega)\; y\; t=t(\omega)$.

Por tanto, como la salida es $y(t)=k_1A_1\cdot Cos(\omega_1 t-\omega_1 t_1)+k_2A_2\cdot Cos(\omega_2 t-\omega_2 t_2)$ el sistema es lineal pero con una cierta distorsión ya que $k_1\neq k_2$ y $t_1\neq t_2$.

En general los sistemas lineales producen una distorsión de amplitud y de fase, aunque en la realidad no se da un sistema ideal, si podemos optimizarlo.
En el ejemplo de la figura comprobamos experimentalmente un sistema lineal.

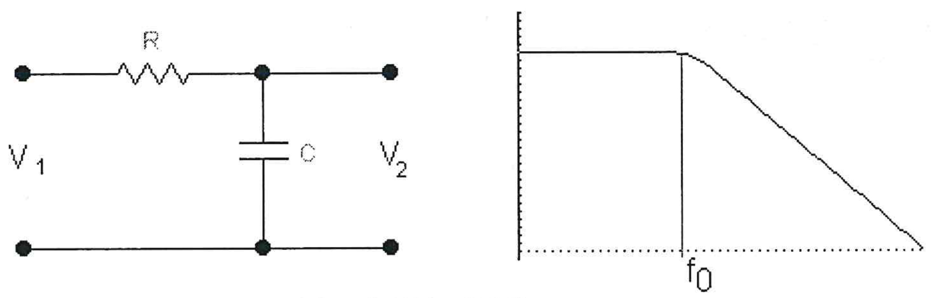


Fig. 3.2 Red RC

Dada una señal de entrada del tipo x(t) a la salida obtendremos $y(t)=\sum_n V_n \cdot e^{j\omega_0 t}$.

De la figura 3.2 la tensión de salida V_2 será:

$$V_2 = \frac{V_1 \cdot Z_c}{R+Z_c} = \frac{V_1}{R+\frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{1}{j\omega C}$$

$$V_2 = \frac{V_1}{1+j\omega RC}$$

Como:

$$\omega\, RC = \frac{\omega}{1/RC} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Entonces:

$$V_2 = \frac{V_1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Por tanto

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Cuyo modulo es

$$\left|\frac{V_2}{V_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Y su fase es

$$\angle\frac{V_2}{V_1} = 0 - artg\frac{\omega}{\omega_0}$$

Cuando $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) << 1$, se comporta sin distorsión, de modo casi ideal.

- Canal lineal sin distorsión (ideal)
    - $y(t)=k\cdot x(t-t_0)$

- Canal lineal sin distorsión (ideal)
    - Amplitud $k = k(f)$ la amplitud depende de la frecuencia
    - Fase $\begin{cases} t_o = t_0(f) \\ \phi_0 = \phi_0(f) \end{cases}$

Entenderemos por tanto que la medida de la distorsión lineal es resultado de una interferencia o ruido no deseado que se suma a la señal de salida deseada o ideal, $y(t) = k \cdot x(t - t_0) + e(t)$ donde $e(t)$es el error.

El valor de distorsión será el resultado de la potencia interferente partido de la potencia útil.

$$D = \frac{P_e}{P_y} = \frac{\langle e^2(t) \rangle}{\langle y^2(t) \rangle} = f^2(t) = \frac{1}{T} \int_T f^2(t)\, dt$$

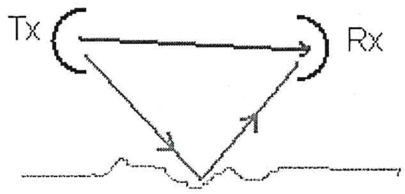


Fig.3.3 Trasmisión y reflexión

Una señal del tipo $x(t) = A.Cos(\omega_0 t)$ trasmitida como en la figura, en el punto de recepción se obtendrá $y(t) = k_0 \cdot A.Cos(\omega_0 t - t_0)$, pero a la vez puede ocurrir que por fenómenos como el de la refracción se obtenga también otra recepción de la misma señal pero con un retardo diferente, por lo tanto en el punto de recepción obtendremos:

$$y(t) = k_0 \cdot A.Cos[(\omega_0 t - t_0)] + k_1 \cdot A.Cos[(\omega_0 t - t_1)]$$

Consideraremos $k_1 \cdot A.Cos[(\omega_0 t - t_1)]$ el segundo término no esperado como interferencia, por tanto el valor de la distorsión:

$$D = \frac{\langle e^2(t) \rangle}{\langle y^2(t) \rangle} = \frac{\frac{k_1 \cdot A^2}{2}}{\frac{k_0 \cdot A^2}{2} + \frac{k_1 \cdot A^2}{2}} = \frac{K_1^2}{K_0^2 + K_1^2}$$

Dividiendo numerador y denominador por K_1^2

$$D = \frac{1}{1 + \left(\frac{K_0}{K_1} \right)^2}$$

3.1.b) Distorsión en sistemas no lineales

Se caracteriza porque la salida es una función no lineal de la entrada $y(t) = f[x(t)]$, considerando que el retardo por propagación $T_0 = 0$ y utilizando el desarrollo de Taylor se puede escribir:

$$y(t) = a_0 + a_1 \cdot x(t) + a_2 \cdot x^2(t) + a_3 \cdot x^3(t) + \cdots$$

Para ensayar la no linealidad de un sistema se usan tonos del tipo $x(t) = A \cdot Cos\,\omega_0 t$. Por tanto usando un solo tono:

$$y(t) = a_0 + [a_1 \cdot A \cdot Cos\,\omega_0 t] + [a_2 \cdot A^2 \cdot Cos^2 \omega_0 t] + [a_3 \cdot A^3 \cdot Cos^3 \omega_0 t] + \cdots$$

Se sabe que:

$$Cos^2 X = \frac{1 + Cos(2X)}{2}$$

$$Cos^3 X = \frac{3 \cdot Cos\ x + Cos(3X)}{4}$$

$$y(t) = a_0 + [a_1 \cdot A \cdot Cos\,\omega_0 t] + \left[a_2 \cdot A^2 \cdot \frac{1 + Cos(2\omega_0 t)}{2}\right] + \left[a_3 \cdot A^3 \cdot \frac{3 \cdot Cos\ \omega_0 t + Cos(3 \cdot \omega_0 t)}{4}\right] + \cdots$$

Agrupando:

$$y(t) = a_0 + \frac{a_2 . A^2}{2} + \left[a_1 + \frac{3}{4} a_3 \cdot A^2 + \cdots\right] \cdot A \cdot Cos(\omega_0 t) + \left[\cdot \frac{a_2 \cdot A^2}{2} \cdot Cos(2\omega_0 t)\right] +$$

$$+ \left[\frac{a_3 \cdot A^3}{4} \cdot Cos(3 \cdot \omega_0 t)\right] + \cdots$$

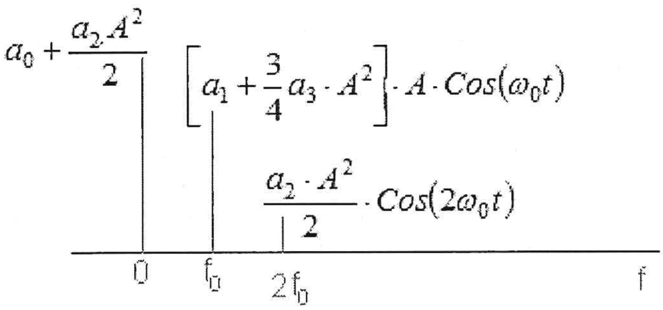


Fig. 3.4 Amplitudes en función a la frecuecias

En la zona lineal se cumple que a=a*k, en la zona no lineal aparecen una serie de frecuencias, armónicos, provocando una perdida de energía.

a. En los sistemas no lineales aparecen perdidas de energía de la señal principal debido a la aparición de armónicos

b. Si la banda de paso usada es muy ancha, se pueden introducir interferencias por los armónicos de nuestra propia señal.

Prueba de los dos tonos:
Entrada del tipo $x(t) = A \cdot Cos\,\omega_1 t + A \cdot Cos\,\omega_2 t$

$$y(t) = a_0 + a_1 \cdot A \cdot (Cos\,\omega_1 t + Cos\,\omega_2 t) + a_2 \cdot A^2 \cdot (Cos\,\omega_1 t + Cos\,\omega_2 t)^2 + \\ + a_3 \cdot A^3 \cdot (Cos\,\omega_1 t + Cos\,\omega_2 t)^3$$

$$y(t) = a_0 + a_1 \cdot A \cdot (Cos\,\omega_1 t + Cos\,\omega_2 t) + \\ + a_2 \cdot A^2 \cdot \left[Cos^2(\omega_1 t) + Cos^2(\omega_2 t) + 2 \cdot (Cos(\omega_1 t) \cdot (\omega_2 t))\right] + \\ + a_3 \cdot A^3 \cdot \left[Cos^3(\omega_1 t) + 3 \cdot Cos^2(\omega_1 t) \cdot Cos(\omega_2 t) + 3 \cdot Cos(\omega_1 t) \cdot Cos^2(\omega_2 t) + Cos^3(\omega_2 t)\right]$$

Se sabe que:

$$2 \cdot Cos\ A \cdot Cos\ B = Cos(A+B) + Cos(A-B)$$

$$Cos\ A \cdot Cos^2\ B =$$

$$= Cos\ A \cdot \frac{1 + Cos(2 \cdot B)}{2} =$$

Multiplcando por 2 N y D

$$= \frac{2 \cdot Cos\ A + [2 \cdot Cos\ A \cdot Cos(2 \cdot B)]}{4} =$$

$$= \frac{2 \cdot Cos\ A + Cos(A + (2 \cdot B)) + Cos(A - (2 \cdot B))}{4}$$

$$y(t)=a_0+a_1\cdot A\cdot(Cos\omega_1 t+Cos\omega_2 t)+$$

$$+a_2\cdot A^2\cdot\left\{\left[\frac{1+Cos\ 2(\omega_1 t)}{2}\right]+\left[\frac{1+Cos\ 2(\omega_2 t)}{2}\right]+\left[Cos[(\omega_1+\omega_2)\cdot t]+Cos[(\omega_1-\omega_2)\cdot t]\right]\right\}+$$

$$+a_3\cdot A^3\left[\frac{3\cdot Cos(\omega_1 t)+Cos\cdot 3\cdot(\omega_1 t)}{4}\right]+\left[\frac{3\cdot Cos(\omega_2 t)+Cos\cdot 3\cdot(\omega_2 t)}{4}\right]+$$

$$+\left[3\cdot\frac{2\cdot Cos(\omega_2 t)+Cos[(\omega_2+2\cdot\omega_1)\cdot t]+Cos[(\omega_2-2\omega_1)\cdot t]}{4}\right]+$$

$$+\left[3\cdot\frac{2\cdot Cos(\omega_1 t)+Cos[(\omega_1+2\cdot\omega_2)\cdot t]+Cos[(\omega_1-2\omega_2)\cdot t]}{4}\right]$$

Procesos de medida en sistemas no lineales para saber la zona de saturación.

Como ya sabemos la señal de salida será:

$$y(t)=a_0+[a_1\cdot A\cdot Cos\omega_0 t]+\left[a_2\cdot A^2\cdot Cos^2\omega_0 t\right]+\left[a_3\cdot A^3\cdot Cos^3\omega_0 t\right]+\cdots,$$

Utilizando una señal de un tono tipo $V_e(t)=A\cdot Cos\omega_0 t$

$$V_s(t)=a_0+\frac{a_2.A^2}{2}+\left[\underbrace{a_1+\frac{3}{4}a_3\cdot A^2}_{Ganancia}+\cdots\right]\cdot\underbrace{A\cdot Cos(\omega_0 t)}_{V_e(t)}+\left[\cdot\frac{a_2\cdot A^2}{2}\cdot Cos(2\omega_0 t)\right]+\cdots$$

Al entrar en saturación disminuye la ganancia, el termino a_3, es negativo y su valor empieza a tener peso, apareciendo nuevos armónicos y haciendo que la amplitud de la frecuencia principal disminuya.

Se sabe que:

$$g_v=\frac{V_2}{V_1}=\sqrt{\frac{P_2}{P_1}}$$

$$10\log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)=10\log g_v^2=\frac{V_2}{V_1}=20\log(g_v)$$

$$20\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)=20\log(g_v)$$

$$V_e(t)=A\cdot Cos\omega_0 t$$

$$P_e=\frac{A^2}{2}$$

$$V_s(t)=a_1\cdot V_e(t)=a_1\cdot A\cdot Cos\omega_0 t$$

$$P_s = \frac{(a_1 \cdot A)^2}{2} = a_1^2 \cdot P_e$$

$$P_s\,(dBm) = 10 \log\left(a_1^2\right) + P_e\,(dBm)$$

$$P_0 = a_1 \cdot P_e \quad Curva\ ideal$$

<u>Punto de compresión a 1dB</u>

Es un parámetro propio del dispositivo y que da el fabricante, nos indica el valor tal que la diferencia entre P_s y P_e donde se aleja de la linealidad es de 1 dB entre la curva de salida real y la ideal.

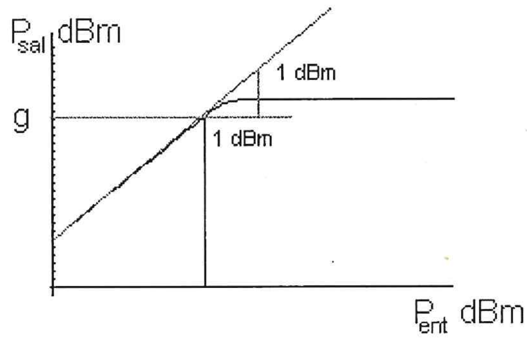


Fig. 3.5 Punto de compresión a 1 dBm

$$V_{sal} = \left(a_1 + \frac{3}{4} \cdot a_3 \cdot A^2\right) \cdot A \cdot Cos\,\omega_{0t}$$

$$P_{ent} = \frac{A^2}{2}$$

$$P_{sal} = \left(a_1 + \frac{3}{4} \cdot a_3 \cdot A^2\right)^2 \cdot P_{ent}$$

$$P_{sal\ dBm} = 10 \log\left(a_1 + \frac{3}{4} \cdot a_3 \cdot A^2\right)^2 + P_{ent\ dBm}$$

El termino a_3 es negativo, por tanto a partir de cierta potencia de entrada la potencia de salida empieza a estabilizarse.

$$P_0 = a_1 \cdot P_e \rightarrow Curva\ ideal$$

$$P_{sal} = \left(a_1 + \frac{3}{4} \cdot a_3 \cdot A^2\right)^2 \cdot P_{ent}$$

El objetivo es que se cumpla que $\frac{P_{sal}}{P_{entr}} = -1\,dBm$

Por tanto:

$$-1 = 10\log\left(\frac{P_s}{P_e}\right) = 10^{-1/10}$$

$$\frac{P_s}{P_0} = 10^{-1/10} = \frac{\left(a_1 + \frac{3}{4}\cdot a_3 \cdot A^2\right)^2 \cdot P_{ent}}{a_1^2 \cdot P_{ent}} = \left(\frac{a_1}{a_1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{a_3}{a_1}\cdot A^2\right)^2 =$$

$$= \left(1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{a_3}{a_1}\cdot A^2\right)^2 = \sqrt{10^{-1/10}} \Rightarrow 1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{a_3}{a_1}\cdot A^2 = 10^{-1/20}$$

$$\frac{10^{-1/20} - 1}{\frac{3}{4}\cdot\frac{a_3}{a_1}} = A^2$$

$$A^2 = \frac{4}{3}\frac{a_1}{a_3}\left(10^{-1/20} - 1\right)$$

Sustituyendo:

$$P_{1dB} = \left[\left(a_1 + \frac{3}{4}\cdot a_3\right)\cdot A^2\right]\cdot P_e$$

$$P_{1dB} = \left[\left(a_1 + \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot \cancel{a_3}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\frac{a_1}{\cancel{a_3}}\left(10^{-1/20} - 1\right)\right)\right]^2 \cdot \left(\frac{\frac{4}{3}\frac{a_1}{a_3}\left(10^{-1/20} - 1\right)}{2}\right)$$

$$P_{1dB} = \left[\cancel{a_1} + a_1\cdot\left(10^{-1/20} - \cancel{1}\right)\right]^2 \cdot \frac{2}{3}\cdot\frac{a_1}{a_3}\left(10^{-1/20} - 1\right)$$

$$P_{1dB} = a_1^2 \cdot 10^{-1/20} \cdot \frac{2}{3}\cdot\frac{a_1}{a_3}\left(10^{-1/20} - 1\right) = \frac{a_1^3}{a_3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 10^{-1/10}\left(10^{-1/20} - 1\right) =$$

Operando:

$$\underline{P_{1dB} = -0.058\cdot\frac{a_1^3}{a_3}}$$

Aplicando a la entrada de un canal una señal con dos tonos de frecuencias muy próximas y de la misma amplitud, del tipo $V_{en} = A \cdot Cos(\omega_1 \cdot t) + A \cdot Cos(\omega_2 \cdot t)$. Aparecen una serie de frecuencias resultado de las anteriores, que se conocen como productos de intermodulación $P_{I_{m,n}} = |mf_1 \pm nf_2|$.

$$V_s = a_0 + [a_1 \cdot (A \cdot Cos\omega_1 \cdot t + A \cdot Cos\omega_2 \cdot t)] + \left[a_2 \cdot (A \cdot Cos\omega_1 \cdot t + A \cdot Cos\omega_2 \cdot t)^2\right] +$$
$$+ \left[a_3 \cdot (A \cdot Cos\omega_1 \cdot t + A \cdot Cos\omega_2 \cdot t)^3\right] + \cdots + \left[a_n \cdot (A \cdot Cos\omega_1 \cdot t + A \cdot Cos\omega_2 \cdot t)^n\right] + \cdots$$

$$V_s = a_0 + |a_1 \cdot A \cdot (Cos\omega_1 \cdot t + Cos\omega_2 \cdot t)| + \left|a_2 \cdot A^2 \cdot (Cos\omega_1 \cdot t + Cos\omega_2 \cdot t)^2\right| +$$
$$+ \left|a_3 \cdot A^3 \cdot (Cos\omega_1 \cdot t + Cos\omega_2 \cdot t)^3\right| + \cdots$$

$$V_s = a_0 + |a_1 \cdot A \cdot (Cos\omega_1 \cdot t + Cos\omega_2 \cdot t)| +$$

Se sabe que:

$$2 \cdot Cos\ A \cdot Cos\ B = Cos(A+B) + Cos(A-B)$$

$$Cos^2\ A = \frac{1 + Cos(2 \cdot A)}{2}$$
$$Cos^3\ A = \frac{3 \cdot Cos(A) + Cos(3 \cdot A)}{4}$$

$$Cos\ A \cdot Cos^2\ B = \frac{2 \cdot Cos\ A + Cos(A + (2 \cdot B)) + Cos(A - (2 \cdot B))}{4}$$

Ya que:

$$= Cos\ A \cdot \frac{1 + Cos(2 \cdot B)}{2} =$$

Multiplcando por 2 N y D

$$= \frac{2 \cdot Cos\ A + [2 \cdot Cos\ A \cdot Cos(2 \cdot B)]}{4} =$$
$$= \frac{2 \cdot Cos\ A + Cos(A + (2 \cdot B)) + Cos(A - (2 \cdot B))}{4}$$

Operando:

$$V_s = a_0 + \left|a_1 \cdot A \cdot \left(Cos\omega_1 \cdot t + Cos\omega_2 \cdot t\right)\right| +$$

$$+\left|a_2 \cdot A^2 \cdot \left[\frac{1+Cos(2\cdot\omega_1\cdot t)}{2} + \frac{1+Cos(2\cdot\omega_2\cdot t)}{2} + Cos(\omega_1+\omega_2)\cdot t + Cos(\omega_1-\omega_2)\cdot t\right]\right| +$$

$$+\left|a_3 \cdot A^3 \cdot \left[\begin{array}{l} \dfrac{3\cdot Cos(\omega_1\cdot t)+Cos(3\cdot\omega_1\cdot t)}{4} + \dfrac{3\cdot Cos(\omega_2\cdot t)+Cos(3\cdot\omega_2\cdot t)}{4} + \\ +3\cdot\dfrac{2\cdot Cos(\omega_2\cdot t)+Cos(2\omega_1+\omega_2)\cdot t+Cos(2\omega_1-\omega_2)\cdot t}{4} + \\ +3\cdot\dfrac{2\cdot Cos(\omega_1\cdot t)+Cos(2\omega_2+\omega_1)\cdot t+Cos(2\omega_2-\omega_1)\cdot t}{4} + \end{array}\right]\right| + \cdots$$

Ordenando según los productos de intermodulación:

$$V_s = \left(a_{0+}a_2 \cdot A^2\right) + \left[a_1 \cdot + \frac{3}{4}a_3 \cdot A^2 + \frac{6}{4}a_3 \cdot A^2\right] \cdot A \cdot \left(Cos(\omega_1+\omega_2)\cdot t\ \right) +$$

$$+\frac{a_2 \cdot A^2}{2}\left[Cos(2\omega_1\cdot t)+Cos(2\omega_2\cdot t)+2\cdot Cos(\omega_1+\omega_2)\cdot t+2\cdot Cos(\omega_1-\omega_2)\cdot t\right]+$$

$$+\frac{a_3\cdot A^3}{4}\left[\begin{array}{l} Cos(3\omega_1\cdot t)+Cos(3\omega_2\cdot t)+\underline{\underline{3\cdot Cos((2\cdot\omega_1-\omega_2)\cdot t)}}+3\cdot Cos((2\cdot\omega_1+\omega_2)\cdot t)+ \\ +\underline{\underline{3\cdot Cos((2\cdot\omega_2-\omega_1)\cdot t)}}+3\cdot Cos((2\cdot\omega_2+\omega_1)\cdot t) \end{array}\right]$$

Los productos de intermodulación de 3^er orden, subrayados, son los mas peligrosos ya que dan lugar a frecuencias muy próximas a las fundamentales, siendo muy difícil su filtrado para su eliminación.

Supongamos dos frecuencias f_1 =100 Hz y f_2=102 Hz sus productos de intermodulación gráficamente será:

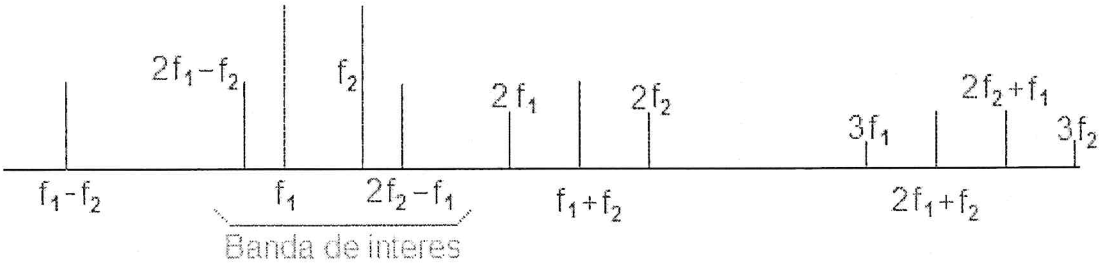


Fig 3.6 Productos de intermodulación

La amplitud de los tonos de los productos de intermodulación es proporcional al cubo de la amplitud de la entrada.

La potencia del producto de intermodulación de orden tres, (I_3) será:

Potencia de entrada $P_0 = \frac{A^2}{2}$

Por tanto la potencia en el I_3 será: $I_3 = \left(\frac{3 \cdot a_3 \cdot A^3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$

Como la potencia de salida ideal o en zona lineal es:

$$P_0 = \frac{(a_1 \cdot A)^2}{2} = a_1^2 \cdot P_{entr}; \qquad A^2 = \frac{2 \cdot P_0}{a_1^2}$$

Sustituyendo en I_3

$$I_3 = \frac{9 \cdot a_3^2 \cdot A^6}{32} = \frac{9 \cdot a_3^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot P_0}{a_1^2}\right)^3}{32} = \frac{9 \cdot a_3^2 \cdot \frac{8}{a_1^6} \cdot P_0^3}{32} =$$

$$\frac{9 \cdot a_3^2 \cdot P_0^3}{4 \cdot a_1^6} = \left(\frac{3 \cdot a_3}{2 \cdot a_1^3}\right)^2 \cdot P_0^3$$

$$\boxed{I_3 = \left(\frac{3 \cdot a_3}{2 \cdot a_1^3}\right)^2 \cdot P_0^3}$$

Expresando la potencia del producto de intermodulación en decibelios:

$$I_{3dBm} = K_{(ganancia)} + 3P_{0dBm}$$

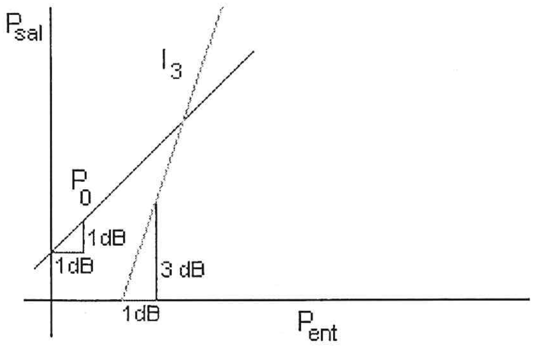


Fig. 3.7 Punto de intersección para I_3

Por cada decibelio de aumento de la potencia de entrada aumenta 3 decibelios la potencia del producto de intermodulación de tercer orden. El punto donde se cortan P_0 e I_3 se llama punto de intersección

En el punto de intersección se cumple que: $I_3 = P_0 = PI_3$. Por tanto:

$$I_3 = P_0 = \left(\frac{3 \cdot a_3}{2 \cdot a_1^3}\right)^2 \cdot P_0^3 \Rightarrow 1 = \left(\frac{3 \cdot a_3}{2 \cdot a_1^3}\right)^2 \cdot \frac{P_0^3}{P_0}$$

$$I_3 = P_0 = PI_3 = \left|\frac{2 \cdot a_1^3}{3 \cdot a_3}\right| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_1^3}{a_3}$$

$$\boxed{PI_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_1^3}{a_3}}$$

Por tanto la relación entre el punto de compresión a 1 dB y el punto de intersección:

$$\frac{PI_3}{P_{1dB}} = \frac{2/3}{0.058} \cong 10dB$$

En función del punto de intersección y de la potencia de salida obtendremos la relación con la potencia de salida

$$I_3 = P_0 \cdot \left(\frac{P_0}{PI_3}\right)^2$$

Teniendo PI_3 y dado un cierto margen $M = P_0 - I_3$

$$I_{3dB} = P_0 + 2(P_0 - PI_3)$$

$$M = P_0 - I_3 = 2(PI_3 - P_0)$$

Ejemplo: Sea un amplificador cuyo punto de intersección esta en 30 dBm y un margen M de 30 dBm. ¿Cual será la potencia máxima de salida que se podrá obtener?

$$P_o = -\left(\frac{M}{2} - PI_3\right) = -(15 - 30) = \underline{15dBm}$$

3.2 Ruido

Se conoce como ruido a las señales aleatorias que aparecen interfiriendo en un sistema. Este puede deberse a diferentes causas:

- Externas, naturales, o por acciones del hombre (industriales)
- Internas, propias del equipo y sus componentes.

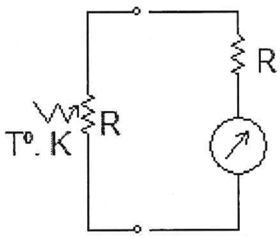
Dentro del ruido interno es característico el que se conoce como ruido blanco o térmico. Se le da este nombre por analogía con el espectro para formar el color blanco.

Se caracteriza por que aparece en todo el espectro de frecuencias con una potencia de $N_{(w)}$. Se debe a la propia agitación térmica que sufren los electrones por encima del 0 absoluto (-273° C).

También se le llama ruido Gausiano por ser una señal aleatoria cuyo valor medio es de 0.

3.2.a) Medidas de ruido en una resistencia.

Sea una resistencia R sometida a una temperatura T_0, se conecta a sus terminales un multimetro, con una resistencia interna R_m (igual a R para que exista adaptación) y un ancho de banda B. tal y como se ve en la figura.

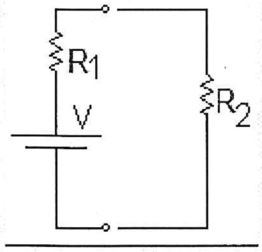


La potencia de ruido medida para T_0=290 °K=17 °C, será:

$N = K \cdot B \cdot T$	**K** es la constante de Boltmann $K = 1'38 \cdot 10^{-23}\ w/Hz\,°K$ **B** es el ancho de banda **T** es la temperatura en ° Kelvin

Recuerda:

Potencia entregada a la carga.

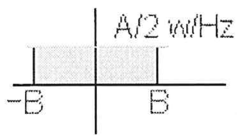


$$P_0 = \left(\frac{V}{R_1 + R_2}\right)^2 \cdot R_2 = V^2 \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

Cuando R_1 es igual a R_2

$$P_0 = V^2 \frac{\cancel{R}}{4R^{\cancel{2}}} = \frac{V^2}{4R}$$

Cuando en un receptor ocurre que sin ninguna entrada, en la salida aparece una señal. Se considera que toda esta señal (ruido) es plano



Para el calculo de la potencia N de ruido en un dispositivo su temperatura T_e equivalente, se calcula de forma análoga al modelo de una resistencia. En un laboratorio se calienta una resistencia y se mide su ruido para el ancho de banda del dispositivo.

$$T_e = \frac{N}{K \cdot B}$$

En el paso final de un equipo (discriminador), la señal debe de llegar con la nitidez y potencia suficiente. Cuando la señal es muy grande el discriminador no tiene problemas, pero si la señal es del mismo orden de magnitud que la señal de ruido, esta interferencia puede provocar que la señal no se reproduzca en condiciones adecuadas.

El fabricante nos dará la relación potencia/ruido S/N umbral a partir de la cual no se garantiza un buen funcionamiento del dispositivo.

3.2.b) Cálculo de ruido en un dispositivo

Se considera que un equipo, etapa, etc, es un dispositivo ideal sin ruido mas un generador de ruido del tipo $K.T_e.B$.

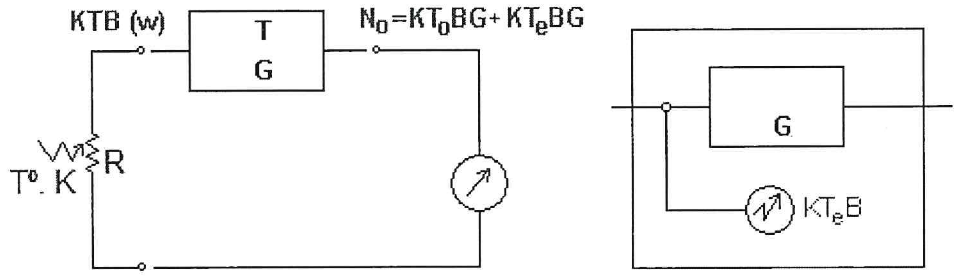
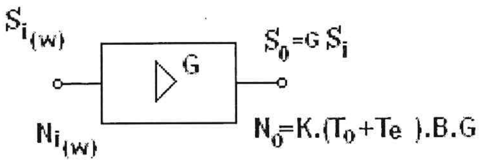


Fig. 3.8 Temperatura de un dispositivo

Por tanto:

$N_0 = K \cdot T_0 \cdot B \cdot G + K \cdot T_e \cdot B \cdot G = K \cdot B \cdot G \cdot (T_0 + T_e)$ $T_e = \dfrac{N_0}{K \cdot G \cdot B} - T_0$	**T_0** = 290ºK (17 ºC) **G** es la ganancia o atenuación propia del equipo **B** el ancho de banda

Proporcionalmente la señal se degrada ca vez que pasa por un dispositivo, debido a que en cada uno aumenta el ruido.



La relación señal/ruido a la entrada y salida de un dispositivo es:

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{S_i}{K \cdot T_o \cdot B}$$

$$\frac{S_0}{N_0} = \frac{S_i \cdot G}{K \cdot (T_o + T_e) \cdot B \cdot G} =$$

$$\textit{multiplicando y dividiendo por } T_0$$

$$= \frac{S_i}{K \cdot T_o \cdot \left(\dfrac{T_o + T_e}{T_o} \right) \cdot B} = \frac{S_i}{K \cdot T_o \cdot \left(1 + \dfrac{T_e}{T_o} \right) \cdot B}$$

$$\textit{sustituyendo}$$

$$= \frac{S_i}{N_i \left(1 + \dfrac{T_e}{T_0} \right)}$$

$\dfrac{S_0}{N_0} = \dfrac{S_i / N_i}{\left(1 + \dfrac{T_e}{T_0} \right)}$	

Donde el termino $\left(1+\dfrac{T_e}{T_0}\right)$ Es lo que en la hoja de características se conoce como figura de ruido, siendo el grado de deterioro de una señal al pasar por un dispositivo.

Por ejemplo una figura de ruido de 2 corresponde:

$$F=2=\frac{(S/N)_i}{(S/N)_0}$$
$$F_{dB}=3=(S/N)_i-(S/N)_0=40\Rightarrow 37dB$$

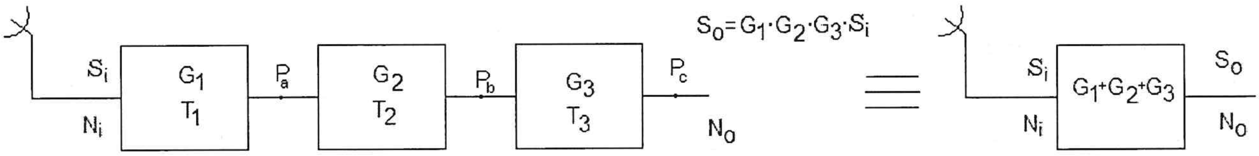
Para dispositivos de una sola entrada como podría ser el de una antena

$$N_i=K\cdot T\cdot B$$
$$T_{antena}=\frac{N}{K\cdot B}$$

En un sistema formado por redes de dos puertas o cuadripolos, su característica de ruido viene dado por el factor de ruido, como la relación entre la potencia de ruido que hay realmente a la salida y la que habría si el cuadripolo no generase ningún ruido conectado a la entrada con un generador de ruido en ambos casos.

$$F=1+\frac{T}{T_0}$$

Sea una red como la de la figura formada por un conjunto de cuadripolos.



Considerando $\underline{N_i=K\cdot T_o\cdot B}$ y $\underline{N_0=K\cdot(T_0+T)\cdot B\cdot G}$ se puede escribir:

$P_a\Rightarrow K\cdot(T_0+T_1)\cdot B\cdot G_1$, temperatura $(T_0+T_1)\cdot G_1$
$P_b\Rightarrow K\cdot B[(T_0+T_1)\cdot G_1+T_2]\cdot G_2$, temperatura $(T_0+T_1)\cdot G_1+T_2$
$P_c\Rightarrow K\cdot B\{[(T_0+T_1)\cdot G_1+T_2]\cdot G_2+T_3\}\cdot G_3$,
temperatura $\{[(T_0+T_1)\cdot G_1+T_2]\cdot G_2+T_3\}$

$$\frac{N_0}{S_0}=\frac{\cancel{K}\cdot\cancel{B}\{[(T_0+T_1)\cdot G_1+T_2]\cdot G_2+T_3\}\cdot\cancel{G_3}}{G_1\cdot G_2\cdot\cancel{G_3}}=\frac{\cancel{K}\cdot(T_0+T_1)\cdot\cancel{B}\cdot\cancel{G_1}\cdot\cancel{G_2}\cdot\cancel{G_3}}{\cancel{G_1}\cdot\cancel{G_2}\cdot\cancel{G_3}}$$

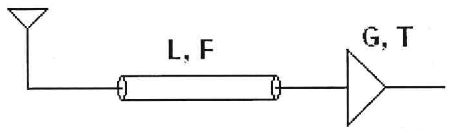
$$[(T_0+T_1)\cdot G_1+T_2]\cdot G_2+T_3=(T_0+T_1)$$

$$T_0 + T = \frac{T_3}{G_1 \cdot G_2} + \frac{T_2}{G_1} + T_0 + T_1$$

Formula de Friis

$$\underline{\underline{T = \frac{T_3}{G_1 \cdot G_2} + \frac{T_2}{G_1} + T_1}}$$

Si T_1 es muy pequeña en comparación a la ganancia del primer bloque consideraremos que $T \cong T_1$. La formula de Friis indica también como se pueden colocar los dispositivos, tengamos por ejemplo una antena un cable y un amplificador donde las perdidas en el cable " L ", se consideran igual a su figura de ruido " F ".



$$F = 1 + \frac{T}{T_0} \Rightarrow T = T_0 \cdot (F - 1)$$

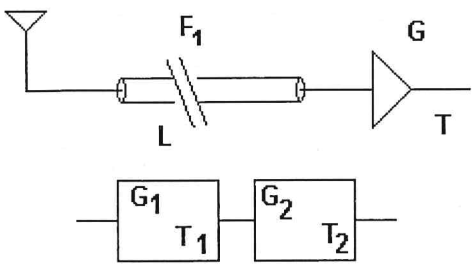
Usaremos la Formula de Friis: $T = T_1 + \frac{T_2}{G_1} + \frac{T_3}{G_1 \cdot G_2} + \cdots$ Sustituyendo

$$T_0 \cdot (F - 1) = T_0 \cdot (F - 1) + \frac{T_0 \cdot (F_2 - 1)}{G_1} + \frac{T_0 \cdot (F_3 - 1)}{G_1 \cdot G_2} + \cdots$$

Formula de Friis para el factor de ruido

$$F = F_1 + \frac{(F_2 - 1)}{G_1} + \frac{(F_3 - 1)}{G_1 \cdot G_2} + \cdots$$

Caso A: El Cable antes del Amplificador

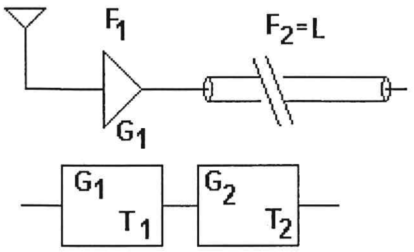


- **L** representa la figura de ruido en el cable.
- El cable, al ser un atenuador, $G_1 = 1/L$

$$F = F_1 + \frac{(F_2 - 1)}{G_1} = L + \frac{(F_2 - 1)}{\frac{1}{L}} = L + L \cdot (F_2 - 1)$$

$$\underline{\underline{F = L \cdot F_2}}$$

Caso B: El Amplificador antes del Cable

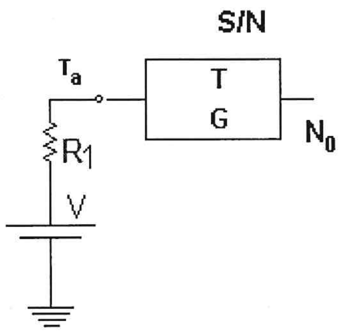


$$F = F_1 + \frac{L-1}{G_1} \cong 1$$

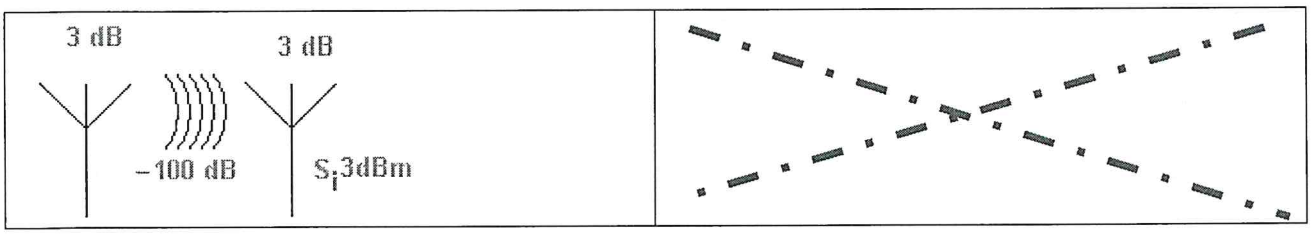
Dentro de un sistema, La relación señal ruido S/N el el punto critico, discriminador, depende de:

- Potencia entregada
- Velocidad de propagación
- Ganancia de la antena
- El ancho de banda, que será el del filtro mas pequeño
- Temperatura de ruido de la antena T_a y el de los demás bloques

Existe una relación mínima señal / ruido que viene dada por el discriminador, para que la señal sea reproducida con calidad esta será $S_0 = N_0 + (S/N)_{Nominal}$, por tanto en la entrada debe de haber una ganancia $S_i = \frac{S_0}{G}$

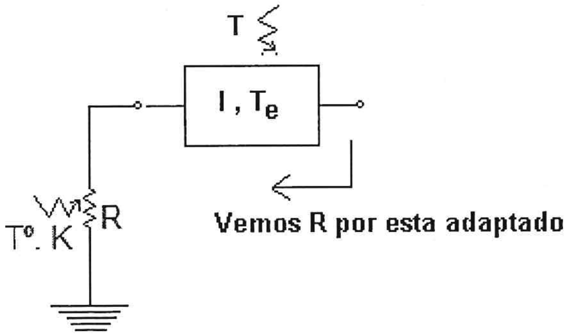


$$N_0 = K \cdot B \cdot (T_a + T) \cdot G$$



Tema 3. EJERCICIOS

3.e.1. Sea un atenuador realizado con elementos pasivos y adaptado, cuyas perdidas son igual a $\ell\,(\ell\,dB)$ y su temperatura física es $T\,^{\circ}K$. Si se conecta a un generador formado por una impedancia a una temperatura T, como se muestra en la figura. Calcule la potencia de ruido a la salida, la temperatura equivalente de ruido del atenuador y su factor de ruido.



$N = K \cdot T \cdot B$ Medido en el laboratorio

$$N = K \cdot (T + T_e) \cdot B \cdot \frac{1}{\ell} = K \cdot T \cdot B \Rightarrow T_e = \ell T - T$$

$$T_e = T(\ell - 1)$$

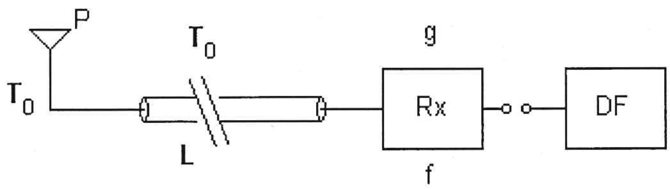
Como la figura de ruido es $f = 1 + \frac{T_e}{T_0}$; $f = 1 + \frac{T(\ell - 1)}{T_0}$, T_0= 290ºK, si suponemos $T=T_0$, el factor de ruido es ℓ

3.e.2 Se trata de comprobar entre si, el funcionamiento de dos estaciones receptoras. La primera recibe en la antena una potencia P y tiene instalado entre la antena y la entrada del receptor un atenuador resistivo a temperatura ambiente T_0, con una atenuación ℓ. La segunda recibe en la antena una señal de potencia P/ℓ y no existe atenuación entre la antena y la entrada del receptor.

Suponiendo que la temperatura de ruido de la antena T_0 y un factor de ruido f.

¿Cual es la estación que origina mejor relación Señal / Ruido S/N a la salida del receptor?, analice también el caso en que la temperatura de ruido de la antena sea $T_a \neq T_0$

Caso a



$$f = 1 + \frac{T}{T_o} \Rightarrow T = T_0(f-1)$$
$$N_0 = K \cdot (T_0 + T) \cdot B \cdot g = K \cdot (T_0 + T_0(f-1)) \cdot B \cdot g =$$
$$N_0 = (K \cdot T_0 \cdot B) \cdot g \cdot f$$

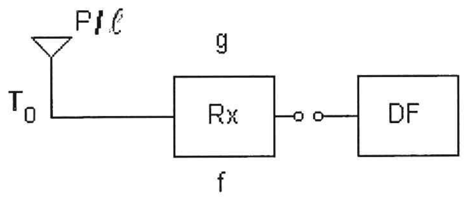
Usando el teorema de Friis

$$f_a = \ell + \frac{f-1}{1/\ell} = \ell \cdot f$$

La potencia de ruido a la salida

$$N_{0_a} = (K \cdot T_0 \cdot B) \cdot \frac{g}{\ell} \cdot \ell \cdot f$$
$$N_{0_a} = K \cdot T_0 \cdot B \cdot g \cdot f$$

Caso B



$$f_b = f$$
$$N_{0_b} = K \cdot T_0 \cdot B \cdot g \cdot f$$

En ambos casos la temperatura es la misma, al ser equipos adaptados el receptor ve T_0 como temperatura de ruido.

Potencia de salida en el caso A.

$$S_{0_a} = P \cdot \frac{1}{\ell} \cdot g = P \cdot \frac{g}{\ell}$$

Potencia de salida en el caso B.

$$S_{0_B} = \frac{P}{\ell} \cdot g = P \cdot \frac{g}{\ell}$$

En el caso de que $T_a \neq T_0$

Caso A

$$T_a = T_0 \cdot (\ell - 1) + \frac{T_0 \cdot (f-1)}{1/\ell} = T_0 \cdot (\ell - 1) + \ell \cdot T_0 \cdot (f-1) = T_0 \cdot (\ell \cdot f - 1)$$

$$\left.\begin{array}{r} N_0 = K \cdot [T_a + T_0(\ell \cdot f -)] \cdot B \cdot \dfrac{g}{\ell} \\ \\ S_0 = P \cdot \dfrac{g}{\ell} \end{array}\right\} (S/N)_0 = \frac{P}{K \cdot [T_a + T_0(\ell \cdot f - 1)] \cdot B}$$

Caso B

$$T_b = T_0 \cdot (f - 1)$$

$$\left.\begin{array}{r} N_0 = K \cdot [T_a + T_0(f-1)] \cdot B \cdot g \\ \\ S_0 = P \cdot \dfrac{g}{\ell} \end{array}\right\} (S/N)_0 = \frac{P}{K \cdot [T_a + T_0(f-1)] \cdot B \cdot \ell}$$

A/ $(S/N)_{0_a} = \dfrac{P/K \cdot B}{T_a + T_o \cdot f \cdot \ell - T_o}$ **B/** $(S/N)_{0_B} = \dfrac{P/K \cdot B}{T_a \cdot \ell + T_o \cdot f \cdot \ell - T_o \cdot \ell}$

El receptor en el caso A tiene un mejor comportamiento.

La potencia de un ruido dado $N = K \cdot T \cdot B = K \cdot T_o \cdot \dfrac{T}{T_o} \cdot B$.

$$N_{(w)} = N_{mw} \cdot 10^{-3}$$
$$1W = 1000 \cdot 10^{-3} W$$

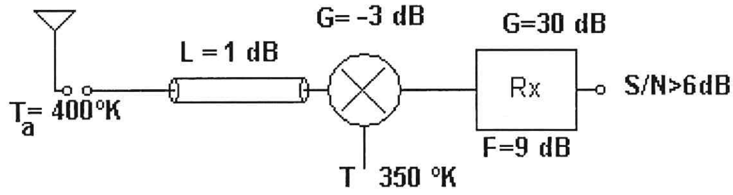
$$N_{(mW)} \cdot 10^{-3} = K \cdot T_o \cdot \frac{T}{T_o} \cdot B$$

$$N_{(mW)} = K \cdot T_o \cdot \frac{T}{T_o} \cdot B \cdot 10^3 = 1000 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 290^\circ \cdot K \cdot \frac{T}{T_o} \cdot B$$

$$N_{(dBm)} = 10 \cdot \log\left[1000 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 290^\circ\right] + 1o \cdot \log\left(\frac{T}{T_o}\right) + 10 \cdot \log(B)$$

$$N_{(dBm)} = -174_{dBm/Hz} + 1o \cdot \log\left(\frac{T}{T_o}\right) + 10 \cdot \log(B)$$

3.e.3 Calcular la potencia necesaria a la entrada del receptor de la figura.



$B = 200\ Khz$ $\qquad$ $L = 1\ dB \Rightarrow \ell = 10^{1/10}$

$K = 1.83 \cdot 10^{-23}\ J/°K$ $\qquad$ $F = 9\ dB = f = 10^{9/10}$

$T_1 = T_0(f_1 - 1) = 290 \cdot (10^{1/10} - 1) = 75\ °K$	$g_1 = -1\ dB \Rightarrow g = 10^{-1/10} = 0.79$
$T_2 = 350\ °K$	$g_2 = -3\ dB = 10^{-3/10} = 0.5$
$T_3 = T_0(f_3 - 1) = 290 \cdot (10^{9/10} - 1) = 2014\ °K$	$G_T = 26\ dB$

$$T_e = T_1 + \frac{T_2}{g_1} + \frac{T_3}{g_1 \cdot g_2} = 75 + \frac{350}{0.79} + \frac{2014}{0'79 \cdot 0'50} = 5617\ °K$$

$$N_0 = K \cdot (T_a + T) \cdot B \cdot g = K \cdot T_0 \cdot \left(\frac{T_a + T}{T_0}\right) \cdot B \cdot g$$

$$N_{0(dBm)} = -174 + 10 \cdot Log\left(\frac{T_a + T}{T_0}\right) + 10 \cdot \log B + G$$

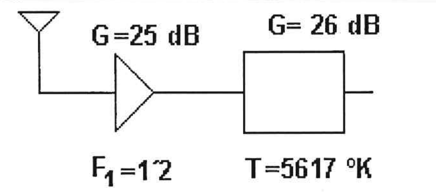
$$N_{0(dBm)} = -174 + 10 \cdot Log\left(\frac{400 + 5617}{290}\right) + 10 \cdot \log(200000) + 26$$

$$N_{0(dBm)} = -81'8\ dBm$$

Si tenemos una potencia de ruido a la salida de $N_0 = -81'8\ dBm$, debemos de tener una potencia a la salida de $S_0 = -75'8\ dBm$. Por tanto, a la entrada necesitaremos una potencia mínima de:

$$S_0 = S_i + G = -101'8\ dBm$$

Utilizando un amplificador de bajo nivel de ruido en la cabecera de la entrada



$$T_1 = T_0 \cdot (f_1 - 1) = 290 \cdot (1'2 - 1) = 58\ ^{\circ}K$$

3.e.4 Calcule el valor de la potencia de saturación de un amplificador cuyo punto de compresión a 1 dB es 10 dBm. Suponga para ello que existe una función no lineal entre la entrada y la salida del tipo $V_s = K_1 \cdot V_e(t) + K_3 \cdot V_e^3(t)$.

Si el punto de compresión a 1dB se alcanza a la salida para un valor de -15 dBm a la entrada. Calcule la ganancia lineal del amplificador. ¿Cuál seria en función no lineal E/S.?

Usando la prueba de un tono del tipo $V_e(t) = A \cdot Cos(\omega \cdot t)$. $\quad P_{1dB} = -0'0058\dfrac{K_1^3}{K_3}$.

$$V_s(t) = K_1 \cdot (A \cdot Cos \cdot (\omega \cdot t)) + K_3 \cdot \left(A^3 \cdot Cos^3 \cdot (\omega \cdot t)\right) =$$
$$= K_1 \cdot A \cdot Cos \cdot (\omega \cdot t) + K_3 \cdot A^3 \cdot \frac{3 \cdot Cos \cdot (\omega \cdot t) + Cos \cdot (3 \cdot \omega \cdot t)}{4}$$

Como la potencia de entrada es $P_e = \dfrac{A^2}{2}$

$$P_s = \frac{\left(K_1 \cdot A + \frac{3}{4} \cdot K_3 \cdot A^3\right)^2}{2} = \frac{K_1^2 \cdot A^2 + \frac{9}{16} \cdot K_3^2 \cdot A^6 + \frac{3}{2} \cdot K_1 \cdot K_3 A^4}{2} =$$
$$= \frac{K_1^2 \cdot A^2}{2} + \frac{9}{32} \cdot K_3^2 \cdot A^6 + \frac{3}{4} \cdot K_1 \cdot K_3 A^4$$

$$P_s = K_1^2 \cdot P_e + \frac{9}{32} K_3^2 \cdot 8 \cdot P_e^3 + \frac{3}{4} \cdot K_1 \cdot K_3 \cdot 4 \cdot P_e^2$$

$$P_s = \frac{9}{4} K_3^2 \cdot P_e^3 + 3 \cdot K_1 \cdot K_3 \cdot P_e^2 + K_1^2 \cdot P_e$$

Ahora realizaremos la primera derivada para calcular el valor maximo.

$$f(x) \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$P'(s)=\frac{27}{4}\cdot K_3^2\cdot P_e^2+6\cdot K_1\cdot K_3\cdot P_e+K_1^2=0$$ Dividiendo todo por $\frac{27}{4}\cdot K_3^2$

$$P_e^2+\frac{6\cdot K_1\cdot K_3}{\frac{27}{4}\cdot K_3^2}\cdot P_e+\frac{K_1^2}{\frac{27}{4}\cdot K_3^2}=0$$

$$P_e^2+\frac{8}{9}\cdot\frac{K_1}{K_3}\cdot P_e+\frac{4}{27}\left(\frac{K_1}{K_3}\right)^2=0$$

$$\frac{\frac{-8}{9}\cdot\frac{K_1}{K_3}\pm\sqrt{\left(\frac{8}{9}\cdot\frac{K_1}{K_3}\right)^2-4\cdot\frac{4}{27}\left(\frac{K_1}{K_3}\right)^2}}{2}$$

$$\frac{\frac{-8}{9}\cdot\frac{K_1}{K_3}\pm\sqrt{\frac{64}{81}\cdot\left(\frac{K_1}{K_3}\right)^2-\frac{16}{27}\left(\frac{K_1}{K_3}\right)^2}}{2}$$

$$=\frac{\frac{-8}{9}\cdot\frac{K_1}{K_3}\pm\sqrt{\frac{16}{81}\left(\frac{K_1}{K_3}\right)^2}}{2}=\frac{\frac{-8}{9}\cdot\frac{K_1}{K_3}\pm\frac{4}{9}\cdot\frac{K_1}{K_3}}{2}$$

$$=\frac{-8\frac{K_1}{K_3}\pm 4\cdot\frac{K_1}{K_3}}{18}=\begin{cases}\xrightarrow{+}-\frac{2}{9}\cdot\frac{K_1}{K_3}\\[2ex]\xrightarrow{-}-\frac{2}{3}\cdot\frac{K_1}{K_3}\end{cases}$$

De los valores obtenidos, escogeremos el mas bajo ya que será este el primer punto de máxima potencia o potencia de saturación.

Como $P_s=\frac{9}{4}K_3^2\cdot P_e^3+3\cdot K_1\cdot K_3\cdot P_e^2+K_1^2\cdot P_e$, entonces la potencia de saturación será:

$$P_{sat}=\frac{9}{4}K_3^2\cdot\left(\frac{-2}{9}\cdot\frac{K_1}{K_3}\right)^3+3\cdot K_1\cdot K_3\cdot\left(\frac{-2}{9}\cdot\frac{K_1}{K_3}\right)^2+K_1^2\cdot\frac{-2}{9}\cdot\frac{K_1}{K_3}$$

$$\frac{-9}{4}K_3^2\cdot\frac{8}{729}\cdot\frac{K_1^3}{K_3^3}+3\cdot K_1\cdot K_3\cdot\frac{4}{81}\cdot\frac{K_1^3}{K_3^2}+K_1^2\cdot\frac{-2}{9}\cdot\frac{K_1^3}{K_3}$$

$$P_{sat}=\frac{-2}{81}\cdot\frac{K_1^3}{K_3}+\frac{12}{81}\cdot\frac{K_1^3}{K_3}+\frac{-18}{81}\cdot\frac{K_1^3}{K_3}=\frac{-8}{81}\cdot\left(\frac{K_1^3}{K_3}\right)$$

La potencia de saturación en este modelo, esta en relación con el punto de compresión $P_{1dB}=-0'0058\frac{K_1^3}{K_3}$, igualando:

$$\frac{P_{1dB}}{-0'058}=\frac{K_1^3}{K_3};\quad \frac{P_{sat}}{\frac{-8}{81}}=\left(\frac{K_1^3}{K_3}\right)$$

$$P_{sat}=\frac{-8}{81}\cdot\frac{P_{1dB}}{-0'058}=1.72.\ P_{1dB}$$

$$P_{sat}=10\cdot\log(1'72)+P_{1dB}=2'34+P_{1dB}$$

Como el punto de compresión esta a 10 dBm, El punto de saturación se encuentra a **12´34dBm**

Apartado B

En P_{1dB} la potencia de salida lineal seria 11 dB

$$P_{s_{dBm}}=G_{dB}+P_{e\,dBm}$$
$$11=G_{dB}+(-15)$$
$$G=26\ dB$$

Apartado C

En la zona lineal $P_s=K_1^2\cdot P_e$

$$G=26\ dB=10^{26/10}=K_1\Rightarrow K_1^2=10^{26/20}=19.95$$

$$P_{1dB}=10dBm=10^{10/10}\cdot 10^{-3}=0'01$$

$$K_3=-0'0058\cdot\frac{(19'95)^3}{0'01}-45'74\cdot 10^{-3}$$

3.e.5 Con los datos del ejercicio anterior, calcule el punto de intersección de tercer orden.

Utilizaremos una señal con dos tonos de la misma amplitud y frecuencia diferente.

$$V_e(t) = A \cdot Cos(\omega_1 t) + A \cdot Cos(\omega_2 t)$$

$$V_s(t) = K_1 \cdot A \cdot (Cos \cdot (\omega_1 t) + Cos \cdot (\omega_2 t)) + K_3 \cdot A^3 (Cos \cdot (\omega_1 t) + Cos \cdot (\omega_2 t))^3 =$$

$$= K_1 \cdot A \cdot (Cos \cdot (\omega_1 t) + Cos \cdot (\omega_2 t)) +$$
$$+ K_3 \cdot A^3 \cdot \begin{bmatrix} Cos^3 \cdot (\omega_1 t) + 3 \cdot (Cos^2 \cdot (\omega_1 t) \cdot Cos \cdot (\omega_2 t)) + \\ + 3 \cdot (Cos \cdot (\omega_1 t) + Cos^2 \cdot (\omega_2 t)) + Cos^3 \cdot (\omega_2 t) \end{bmatrix} =$$

$$= K_1 \cdot A \cdot (Cos \cdot (\omega_1 t) + Cos \cdot (\omega_2 t)) +$$
$$+ K_3 \cdot A^3 \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{3 \cdot Cos \cdot (\omega_1 t) + Cos \cdot (3 \cdot \omega_1 t)}{4} + \\ + 3 \cdot \dfrac{2 \cdot Cos \cdot (\omega_2 t) + Cos \cdot (2 \cdot \omega_1 + \omega_2 t) + Cos \cdot (2 \cdot \omega_1 - \omega_2 t)}{4} + \\ \\ + 3 \cdot \dfrac{2 \cdot Cos \cdot (\omega_1 t) + Cos \cdot (2 \cdot \omega_2 + \omega_1 t) + Cos \cdot (2 \cdot \omega_2 - \omega_1 t)}{4} + \\ + \dfrac{3 \cdot Cos \cdot (\omega_2 t) + Cos \cdot (3 \cdot \omega_2 t)}{4} \end{bmatrix}$$

La potencia del producto de intermodulación de tercer orden I_3

$$I_3 = \frac{3}{4} \cdot K_3 \cdot \underbrace{A^3}_{amplitud}$$

$$P_0 = K_1^2 \cdot \frac{A^2}{2} \Rightarrow A^2 = \frac{2 \cdot P_0}{K_1^2}$$

$$I_3 = \frac{\left(\frac{3}{4} \cdot K_3 \cdot A^3\right)^2}{2} = \frac{9}{32} \cdot K_3^2 \cdot (A^2)^3 =$$

$$I_3 = \frac{9}{32} \cdot K_3^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot P_0}{K_1^2}\right)^3 =$$

$$I_3 = \frac{9}{32} \cdot K_3^2 \cdot \frac{8 \cdot P_0^3}{K_1^6} = \underbrace{\left(\frac{3 \cdot K_3}{2 \cdot K_1^3} \right)^2}_{Cte} \cdot P_0^3$$

Al expresar la potencia en dB el $I_{3dBm} = Cte + 3 \cdot P_{0dBm}$. Nos indica que la potencia de este producto de intermodulación esta creciendo 3 veces mas que la potencia lineal. El punto donde se cruzan ambas rectas se llama punto de intersección de 3^er^ orden PI3.

Cuando $I_3 = P_0 = PI3 = \left| \frac{2}{3} \cdot \frac{K_1^3}{K_3} \right|$

$$P_{1dB} = -0'058 \cdot \frac{K_1^3}{K_3} \Rightarrow \frac{K_1^3}{K_3} = \frac{P_{1dB}}{-0'058}$$

Sustituyendo

$$PI3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{P_{1dB}}{-0'058} = 11'49 \cdot P_{1dB}$$

$$PI3_{1dB} = 10 \cdot \log(11'49) + P_{1dB} = 10'60 + 10 = 20'60\,dBm$$